

Hafta 2: 2D Projektif Geometri ve Dönüşümler

Dünyayı kameranın gözünden anlamak ve bükmek.



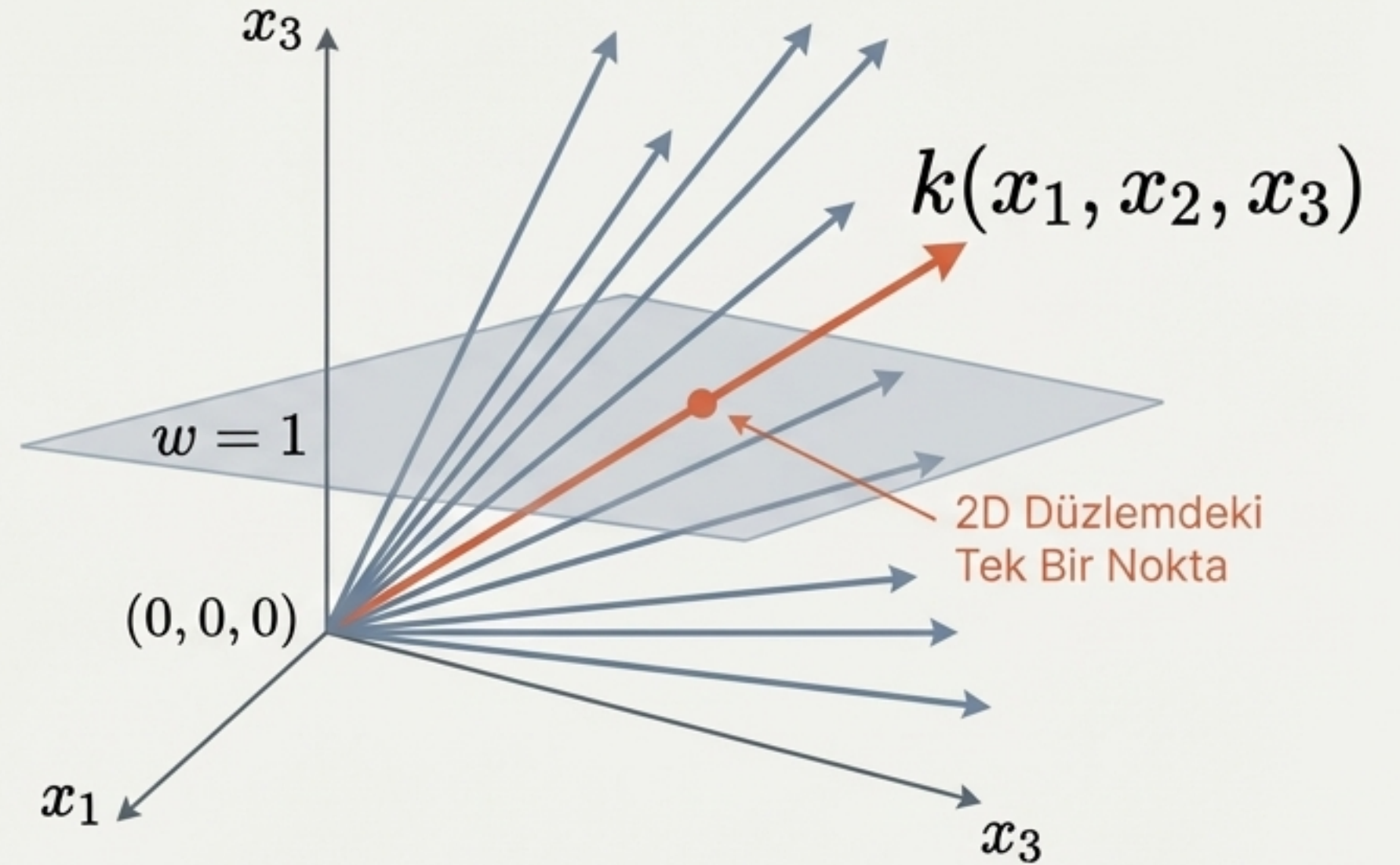
Öklid Geometrisinin Sınırları

- Klasik Öklid geometrisine göre paralel doğrular asla kesişmez. Uzunluklar ve açılar sabittir.
- Ancak bir fotoğrafa baktığımızda durum farklıdır: Tren rayları ufukta birleşir, nesneler uzaklaştıkça küçülür.
- Görsel dünyayı ve kameranın doğasını açıklamak için şekil ve uzunluk koruyan Öklid geometrisi yetersiz kalır. Bize yeni bir geometri lazım: **Projektif Geometri**.



Sihirli Geçiş: Homojen Koordinatlar

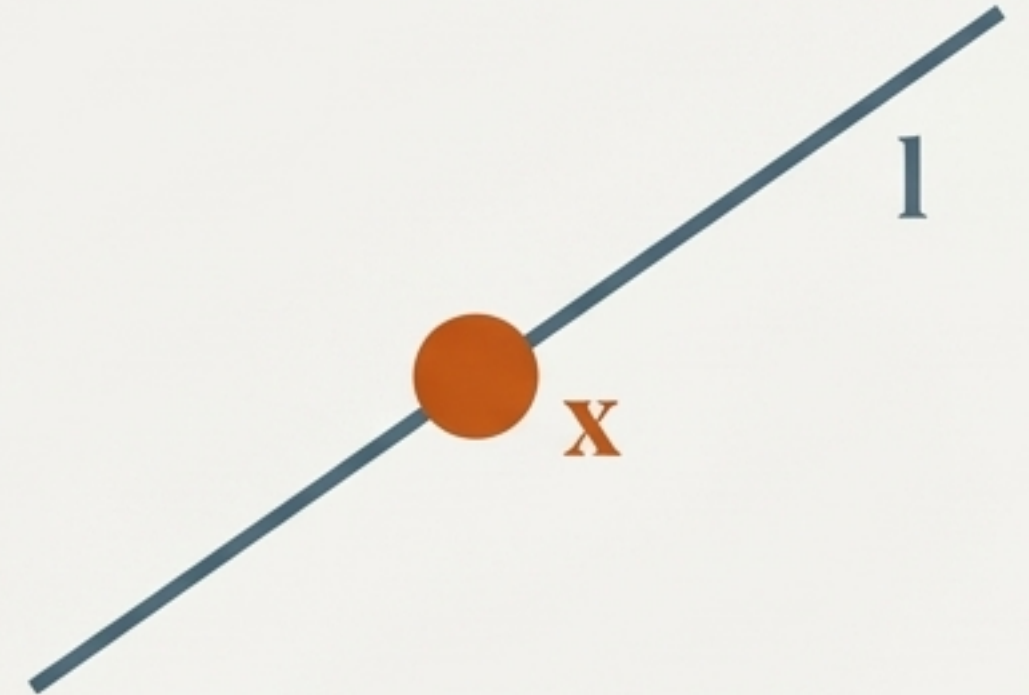
- Klasik 2D uzaydan (x, y) , Projektif uzaya (x, y, w) geçiş yapıyoruz.
- Orijinden çıkan ve aynı doğrultuda olan tüm noktalar (kx, ky, k) aynı 2D noktayı ifade eder (burada kx, k aynı 2D noktayı ifade eder (burada $k \neq 0$)).
- Fiziksel karşılığı: Resimdeki bir piksel, aslında kameranın odak noktasından çıkan 3 boyutlu bir ışındır (ray).



Noktalar, Doğrular ve Mükemmel Uyum

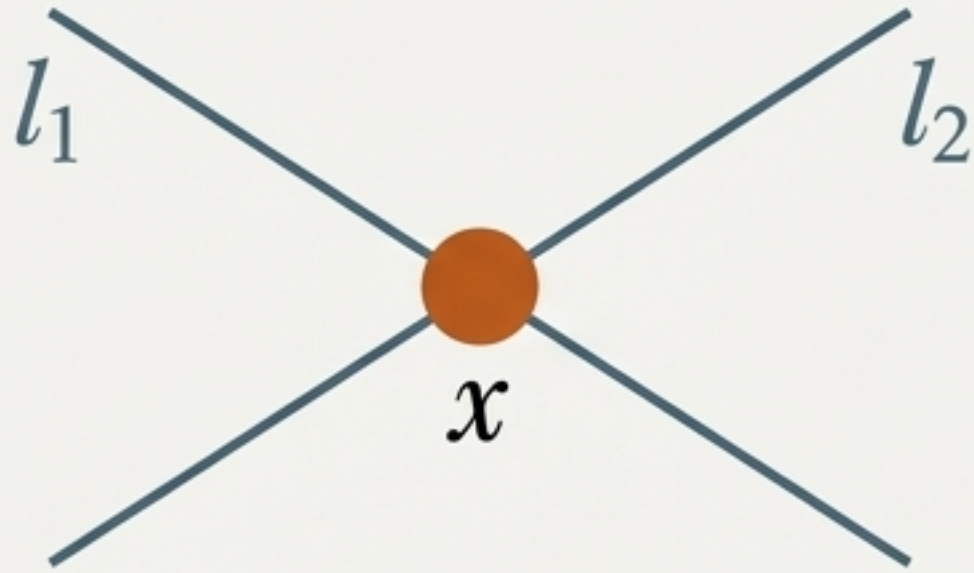
- Homojen uzayda bir doğru $\mathbf{l} = (a, b, c)^T$ ile temsil edilir. ($ax + by + c = 0$)
- Bir nokta ise $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$ vektörüdür.
- Bir noktanın bir doğru üzerinde olup olmadığını bulmak karmaşık denklemler gerektirmez. Sadece basit bir iç çarpım yeterlidir.

$$\mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$$

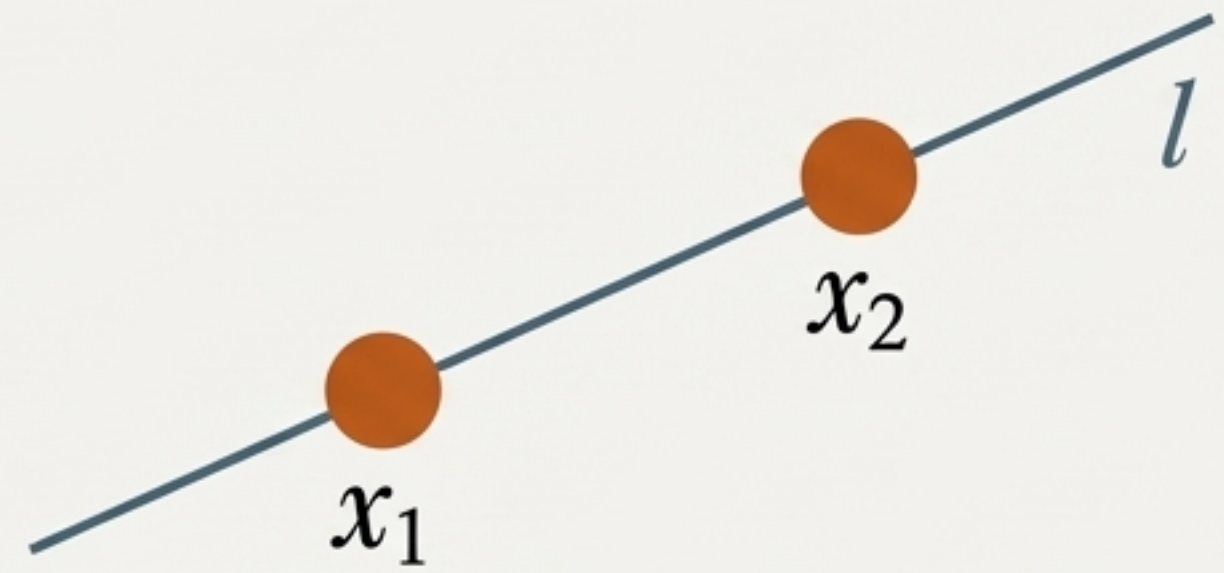


Geometrinin Şiiri: Duality (İkilik)

Projektif geometride noktalar ve doğrular yer değiştirebilir; kurallar değişmez.
İki doğrunun kesişimi bir noktayı yaratır. İki noktanın birleşimi bir doğruyu yaratır.
Matematiksel formül ikisi için de tamamen aynıdır: Vektörel Çarpım (Cross Product).



$$x = l_1 \times l_2$$



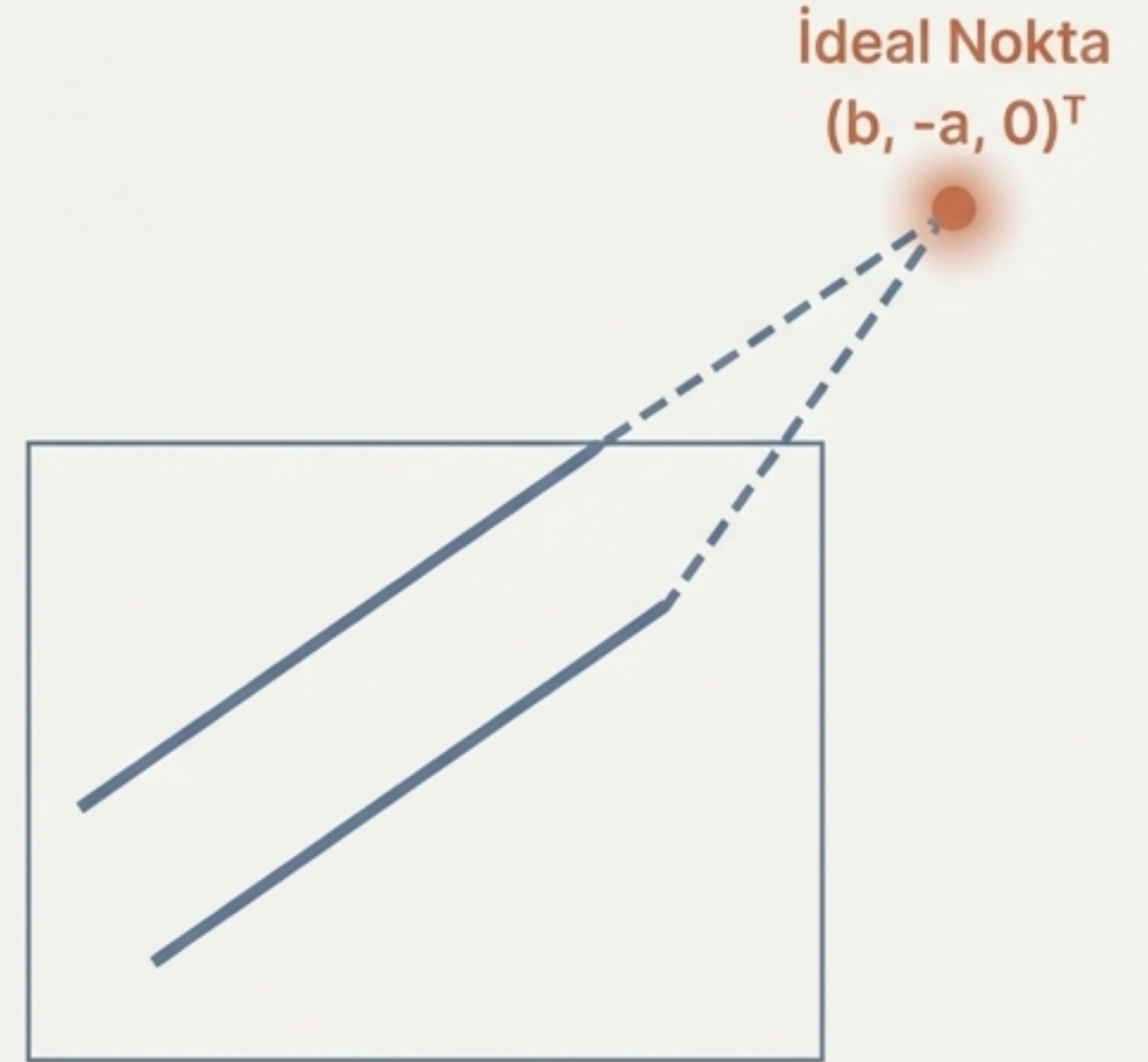
$$l = x_1 \times x_2$$

Sonsuzluğu Evcilleştirmek: İdeal Noktalar

- İki paralel doğruyu ($ax + by + c = 0$ ve $ax + by + c' = 0$) vektörel çarpım ile kestiğimizde ne olur?
- Hesaplama sonucu: $(a, b, c) \times (a, b, c') = (b, -a, 0)^T$.
- Son koordinatın **sıfır ($w=0$)** olduğuna dikkat edin!

$$(a, b, c) \times (a, b, c') = (b, -a, 0)^T.$$

- Sonsuzdaki noktalar (İdeal noktalar), homojen uzayda son koordinatı "**0**" olan sıradan vektörlerdir. Sonsuzluk artık ulaşılmaz bir konsept değil, sadece bir koordinattır.



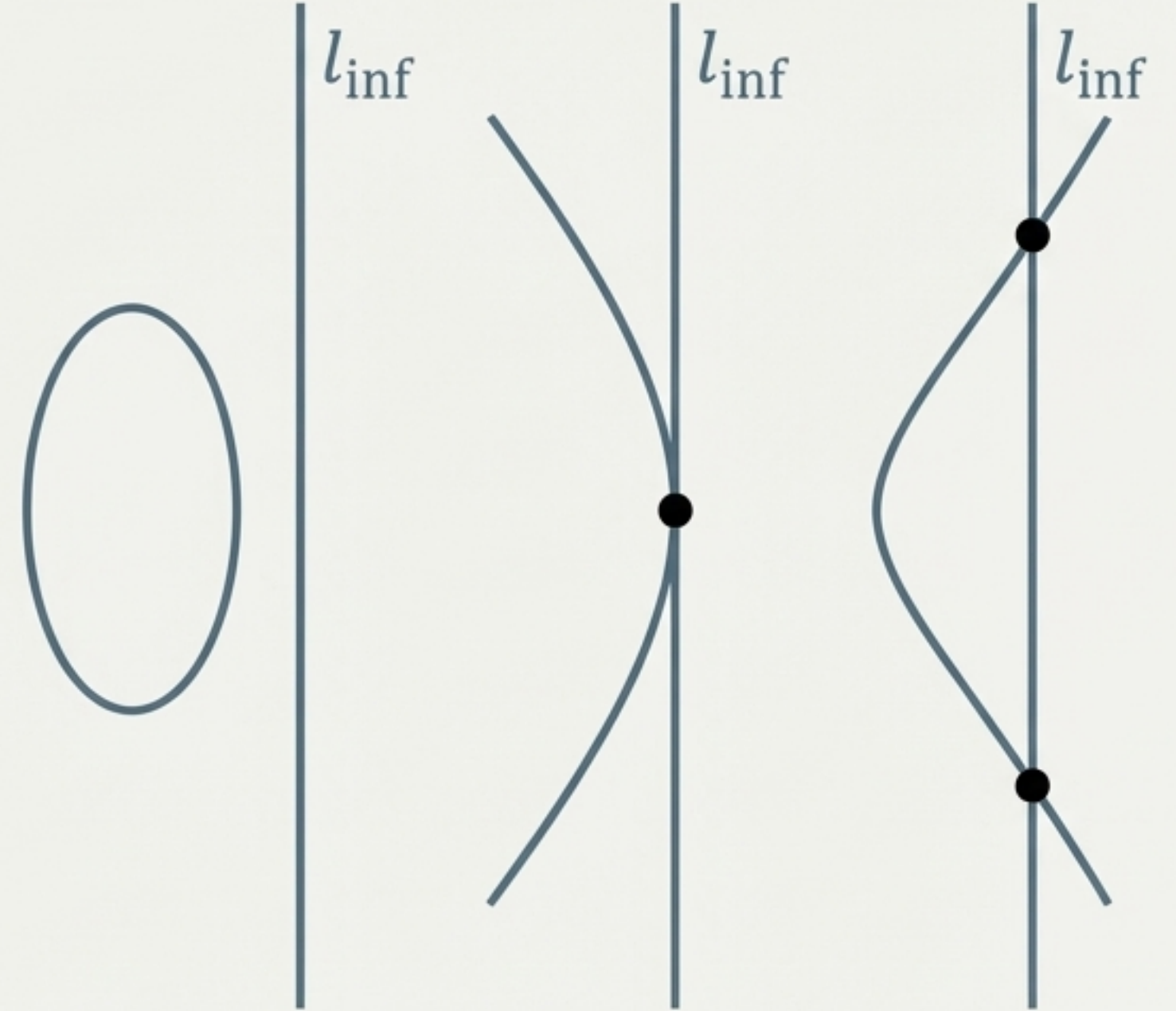
Sonsuzdaki Doğru (l_{inf})

- Düzlemdeki tüm ideal noktalar (farklı yönlerde giden tüm paralel doğru gruplarının kesişim noktaları) tek bir doğru üzerinde birleşir.
- Bu doğruya Sonsuzdaki Doğru (Line at infinity) denir ve matematiksel olarak $l_{inf} = (0, 0, 1)^T$ ile ifade edilir.
- Fotoğraflarda bu doğru "ufuk çizgisi" (vanishing line) olarak karşımıza çıkar. Paralellik gibi Afine özellikleri geri kazanmanın anahtarı ufuk çizgisini bulmaktır.

$$l_{inf} = (0, 0, 1)^T$$

Konikler: Projektif Uzayda Eđriler

- İkinci dereceden eğriler (çember, elips, parabol, hiperbol) projektif uzayda aynı ailenin üyeleridir. Sadece l_{inf} (sonsuzdaki doğru) ile nasıl kesiştiklerine göre şekil değiştirirler.
- Bir konik 3×3 boyutunda simetrik bir C matrisi ile temsil edilir: $x^T C x = 0$
- Bir koniği tamamen tanımlamak için 5 serbestlik derecesi (dof), yani 5 nokta gereklidir.

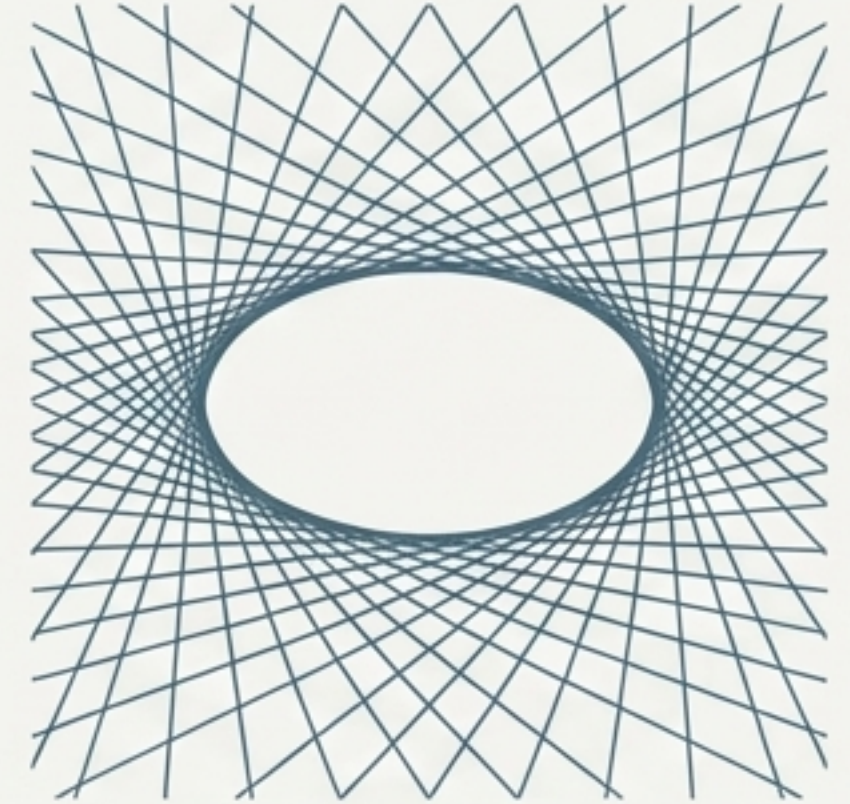


Eğrilerin İkiliği: Dual Konikler

- Duality kuralı burada da geçerlidir! Bir eğriyi sadece yan yana dizilmiş noktalar kümesi olarak düşünmek zorunda değiliz.
- Bir eğri, aynı zamanda kendisini teğet olarak çevreleyen doğruların bir zarfı (envelope) olarak da tanımlanabilir.
- Eğer nokta koniği C ise, dual (doğru) koniği C^* (adjoint matris) ile ifade edilir: $\mathbf{l}^T \mathbf{C}^* \mathbf{l} = 0$.



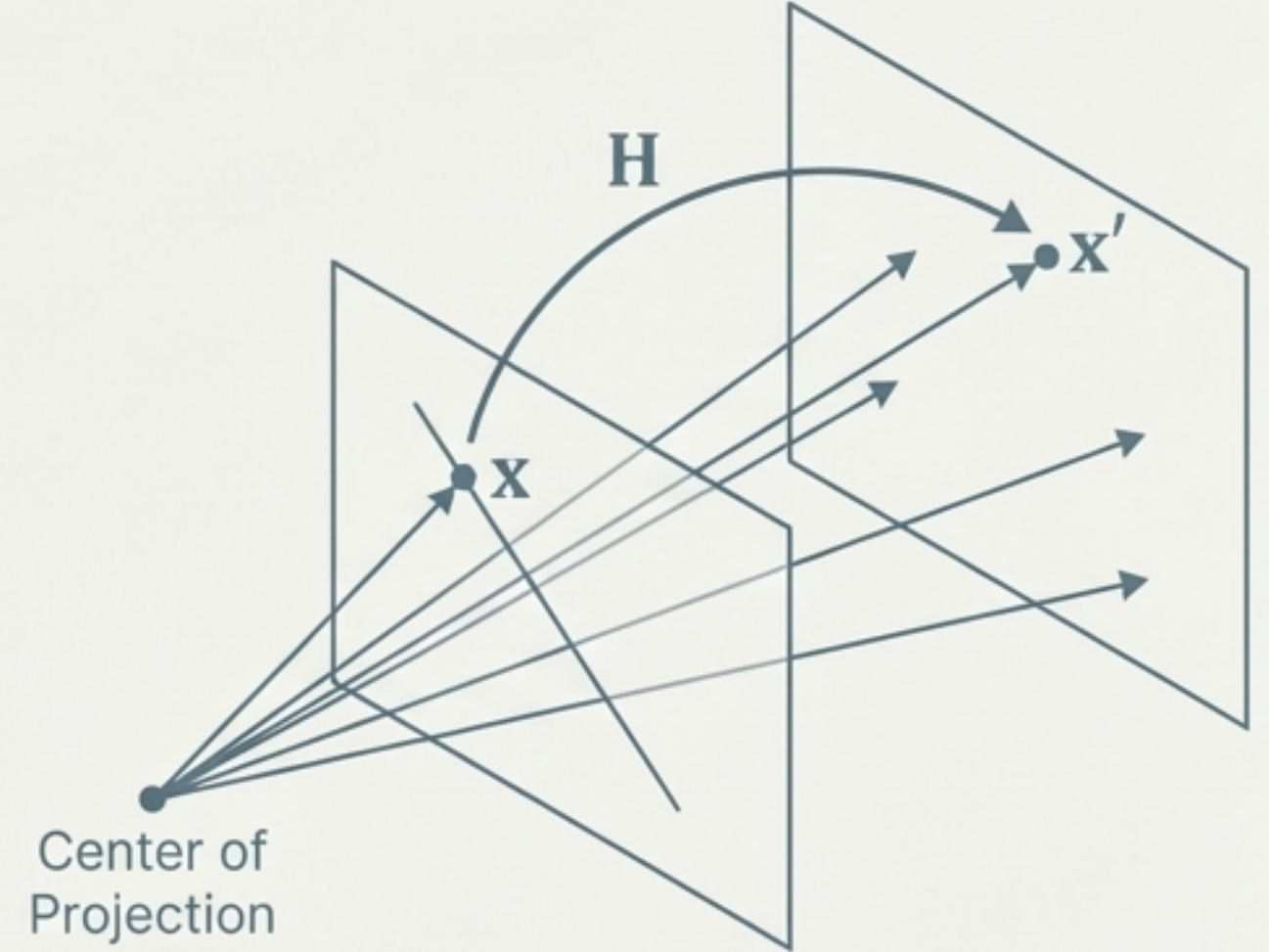
Nokta Koniği (C)



Dual Konik (C^*)

2D Homografiler (Projektif Dönüşümler)

- Dünyayı nasıl bükeriz? İki düzlem arasındaki izdüşümü (örneğin kameranın dünyayı görme biçimini) modellediğimiz yapısal dönüşümlere **Homografi** denir.
- Doğruları doğrulara eşleyen (**collineation**) tersine çevrilebilir bir matristir.
- Denklem: $\mathbf{x}' = \mathbf{H} \mathbf{x}$
- **H** matrisi 3×3 boyutundadır, ölçekleme önemsiz olduğu için **8 serbestlik derecesine (dof)** sahiptir. 4 nokta eşleşmesi ile hesaplanabilir.



Dönüşümler Hiyerarşisi: İzometri ve Benzerlik

- **İzometri (3 dof):** Yön ve konum değişir. Uzunluk ve açı her zaman korunur. (Kare, kare olarak kalır).
- **Benzerlik / Similarity (4 dof):**
- **Benzerlik / Similarity (4 dof):** İzometriye sadece **Ölçek** (scale) eklenir. Şekiller büyür veya küçülür ama açılar korunur. Daire hala dairedir.



$$\begin{bmatrix} s & R & t \\ 0 & 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Dönüşümler Hiyerarşisi: Afin Dönüşüm

- Afin Dönüşüm (6 dof): Matrisin son satırı her zaman $(0, 0, 1)$ olarak kalır. Bu sayede *linf* (sonsuzdaki doğru) korunur.
- Korunanlar:
- **Korunanlar:** Açılar ve uzunluklar bozulur (kare eşkenar dörtgen olur, çember elips olur) ama **paralellik** kesinlikle korunur. Paralel doğrular görüntüde de paralel kalır.



Dönüşümler Hiyerarşisi: Projektif Dönüşüm

- **Projektif Dönüşüm (8 dof):** En genel ve özgür hal. l_{inf} (sonsuzdaki doğru) artık sonsuzda kalmaz, sonlu bir doğruya (ufuk çizgisine) taşınır.
- **Korunanlar:** Paralellik kaybolur. Sadece doğrusallık (düz çizgiler düz kalır) ve çapraz oran (cross-ratio) korunur.
- **Derinlik** hissini veren asıl bozulma budur. Yakın nesneler büyük, uzak nesneler küçük görünür.



Büyük Final: Perspektif Bozulmasının Giderilmesi (Rectification)

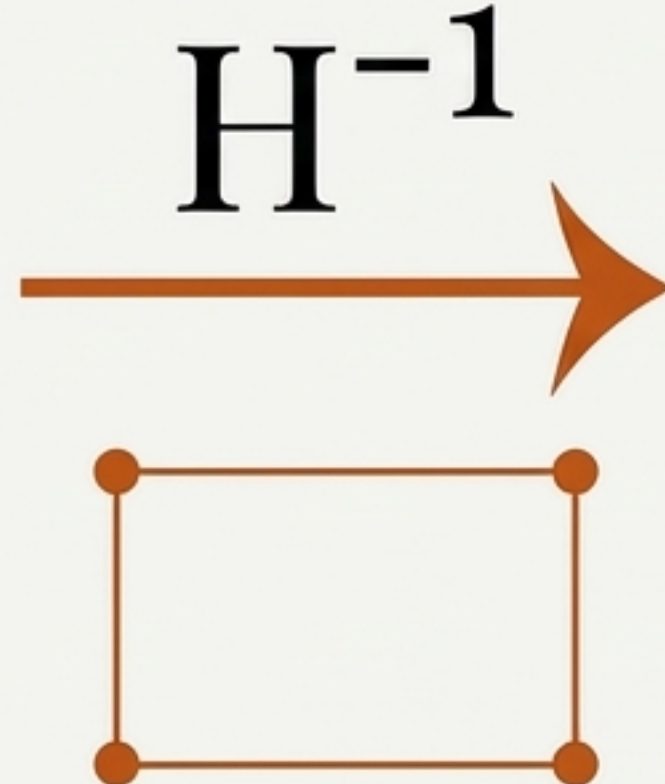
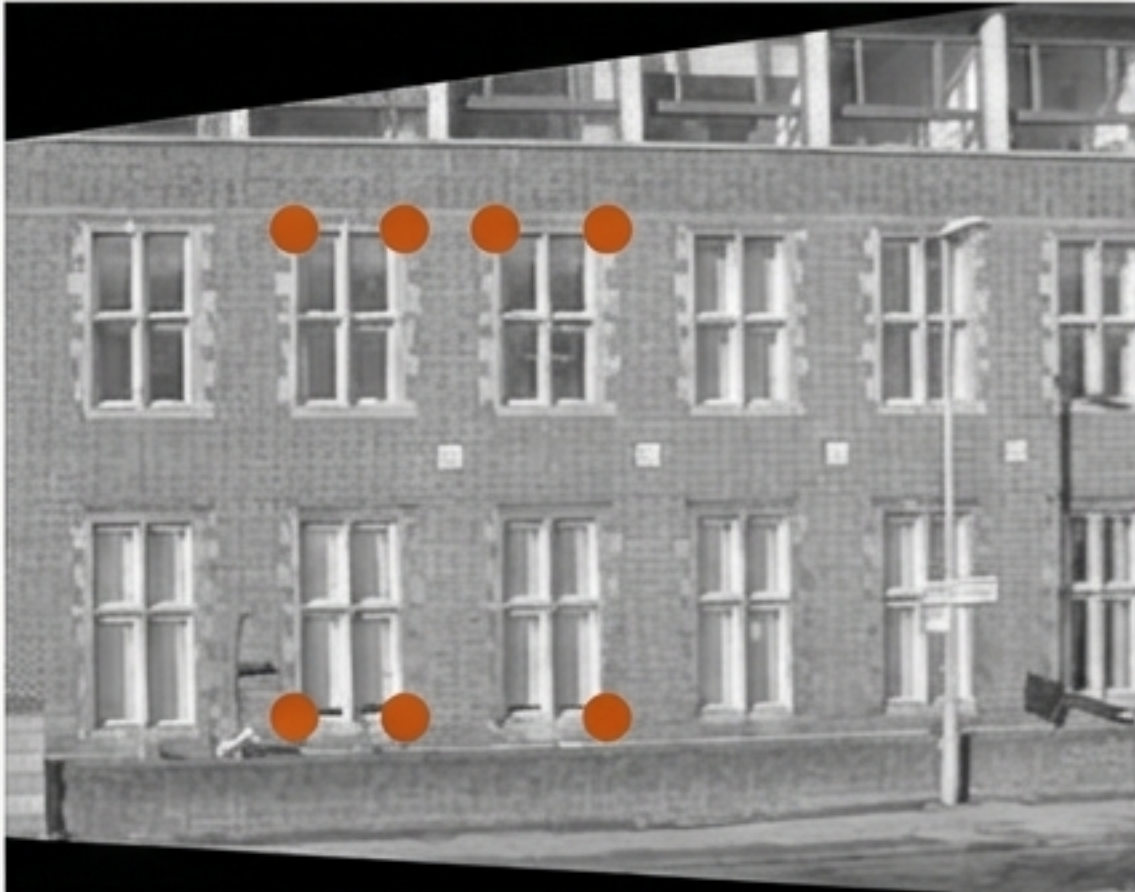
Tüm bu matrisler gerçek hayatta ne işe yarar?

Adım 1: Çarpık görüntüdeki 4 köşe noktası ($\mathbf{x}$) seçin.

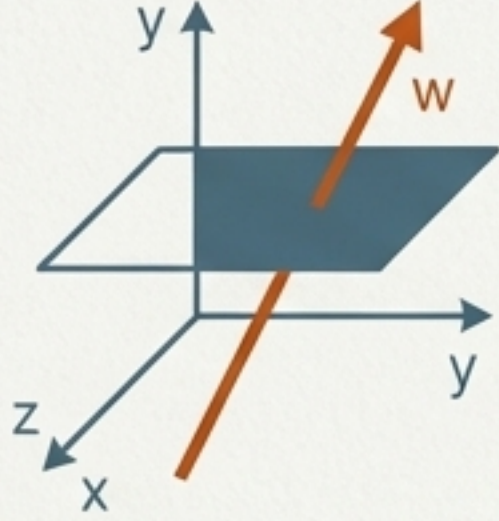
Adım 2: Bunları ideal bir dikdörtgenin köşeleriyle ($\mathbf{x}'$) eşleştirin.

Adım 3: $\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x}$ üzerinden 8 serbestlik dereceli $\mathbf{H}$ matrisini hesaplayın.

Adım 4: Tüm resimdeki pikselleri $\mathbf{H}^{-1}$ ile tersine çarpın. Sonuç: Mükemmel ve ölçülebilir bir cephe!



Özet ve Sonraki Adımlar



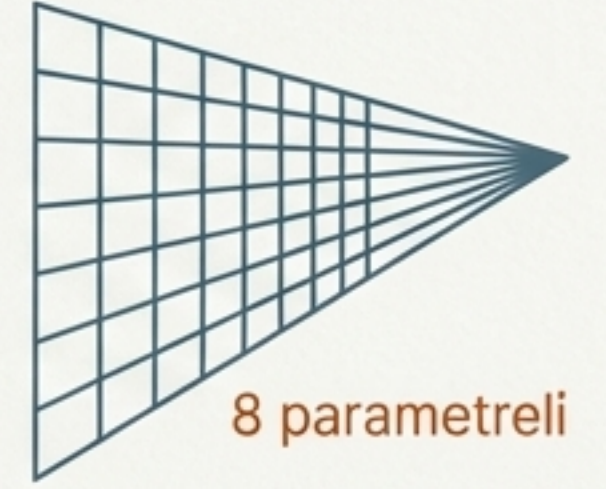
1. Öklid dünyasının kısıtlamalarından Projektif Uzaya (w) geçtik.



2. Sonsuzluğu evcilleştirip bir matematiksel değere ($w=0$) dönüştürdük.



3. Nokta ve Doğru ikiliğini (Duality) çapraz çarpımın zarafetiyle keşfettik.



4. 8 parametrelili Homografi ile perspektifi kontrol altına aldık ve binaları düzelttik.

Haftaya: Kameraların 3D'den 2D'ye İzdüşümü (Camera Models). 3 Boyutlu dünyayı nasıl düzleştiriyoruz?